

Subiectul I

30 de puncte

La fiecare dintre problemele următoare încercuiți răspunsul corect. Numai una dintre cele patru variante de răspuns este corectă.

- 5p 1. Calculați suma elementelor matricei A^2 , unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
A. 8 B. 6 C. 4 D. 2
- 5p 2. Determinați numărul real a pentru care $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 0$.
A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. 0 D. 1.
- 5p 3. Calculați aria triunghiului de vârfuri $A(1,1)$, $B(-1,3)$, $C(2,-4)$.
A. 8 B. 6 C. 4 D. 2
- 5p 4. Determinați numărul real b pentru care matricea $B = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ nu este inversabilă.
A. 8 B. 6 C. 4 D. 2
- 5p 5. Fie $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ și $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Precizați căreia dintre mulțimile următoare aparține matricea $A \cdot B$.
A. $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ B. $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ C. $\mathcal{M}_{6,3}(\mathbb{R})$ D. $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$
- 5p 6. Determinați numărul real c pentru care sistemul $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 5 \\ x + 3y = c \end{cases}$ este compatibil.
A. 8 B. 6 C. 4 D. 2

Subiectul al II-lea

30 de puncte

Pentru fiecare dintre cerințele următoare scrieți rezolvarea completă.

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / A \cdot X = X \cdot A\}$.

- 5p a) Calculați A^3 .
- 5p b) Arătați că $\det(A^n) \neq 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p c) Arătați că, dacă $X \in G$, atunci există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$.
- 5p d) Arătați că, dacă $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, atunci $X^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ nba^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p e) Demonstrați că, dacă $X^n = A$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $X \in G$.
- 5p f) Determinați $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $X^n = A$.

Subiectul al III-lea

30 de puncte

Pentru problema următoare scrieți rezolvarea completă.

Patru cursanți INSAM vor să-și afle greutatea folosind un cântar care nu poate cântări mai puțin de 100 kg; astfel ei urcă pe cântar doi câte doi. Bogdan și Țucu au împreună 142 kg, Țucu și Gabriel au împreună 182 kg, Gabriel și Dorin au împreună 184 kg, iar Dorin și Bogdan au împreună 144 kg. Demonstrați că aceste informații nu sunt suficiente pentru a afla cât cântărește fiecare cursant.

Notă. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru 2 ore.